L3 SM UE604P	Université de Tours	Année 2011-2012

Méthodes mathématiques pour la physique

contrôle continu **durée: 2h**

1. Soient a, $a^\dagger$ deux opérateurs vérifiant la relation $[a, a^\dagger] = 1$ et soit f un vecteur vérifiant $af = 0$. Montrer que
$$f_\alpha = e^{\alpha a^\dagger} f, \qquad \alpha \in \mathbb{C}$$
est un vecteur propre de a et calculer la valeur propre associée.

2. Considérons l'ensemble d'opérateurs différentiels $\ell_n = -z^{n+1}\frac{\partial}{\partial z}$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Calculer le commutateur $[\ell_n, \ell_m]$ et l'exprimer en fonction des $\{\ell_k\}$. L'algèbre engendrée par ces relations de commutation s'appelle l'algèbre de Witt. Vérifier qu'elle contient l'algèbre du moment angulaire comme sous-algèbre associée à $n = -1, 0, 1$.

3. Donner la forme explicite des fonctions propres communes de L^2 et L_z associées aux valeurs propres $\ell = 4$, $m = -1$.

4. Montrer que $J_{1/2}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin s}{\sqrt{s}}$. Puis démontrer la formule
$$J_{\ell+\frac{1}{2}}(s) = (-1)^\ell \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, s^{\ell+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\right)^\ell \frac{\sin s}{s}, \qquad \ell = 0, 1, 2, \ldots$$

   Indication: on pourra (par exemple) utiliser la formule de reflexion pour la fonction gamma:
$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$